

研究成果報告書

研究テーマ (和文)	最小の非可算基数の巨大基数的性質について		
研究テーマ (英文)	On large cardinal properties of the least uncountable cardinal		
研究期間	2019年 ~ 2022年	研究機関名 芝浦工業大学	
研究代表者	氏名	(漢字)	池上 大祐
		(カタカナ)	イケガミ ダイスケ
		(英文)	Daisuke Ikegami
	所属機関・職名	芝浦工業大学・准教授	
共同研究者 (1名をこえる場合は、別紙追加用紙へ)	氏名	(漢字)	
		(カタカナ)	
		(英文)	Nam Trang
	所属機関・職名	北テキサス大学・助教	

概要 (600字~800字程度にまとめてください。)

本研究では、自然数を一般化した無限の数(無限基数)と、チェス・囲碁・将棋といった2人でプレーするボードゲームを一般化した無限ゲームの関係について考察した。

2019年度は、最小の非可算基数 ω_1 が超コンパクト基数の記述集合論的な帰結について調べた。 ω_1 が超コンパクト基数であるとき、a) 任意の集合 X に対して $X^\#$ が存在すること、b) 「集合論のモデル $L(R)$ において決定性公理が成り立つ」という命題が V のどの強制拡大でも成り立つこと、がわかった。

2020年度は、1) どのくらい強い巨大基数の存在下で、Chang モデルが決定性公理 (AD, the axiom of determinacy) を満たすか、2) 巨大基数公理を満たす集合論のモデルたちと決定性公理 AD を満たす集合論のモデルたちの間の既存の対応 (Derived Model Theorem) を Chang モデルに対して拡張できるか、の二点について調べた。

1) の問題は、ある Prikry-type 強制法 (順序集合) P が、ある組み合わせ論的性質 A を持つかどうかにかかわらず帰着できることがわかった。現在、上記の P が、この組み合わせ論的性質 A を持つかどうかについて考察を続けている。

2) の問題は、巨大基数公理を満たす集合論のモデルから AD を満たす Chang モデルの構成の方向の対応が、上記の P と A の問題に帰着できることがわかった。

2021, 2022年度は、無限ゲームの研究について以下の二種類の研究成果 (とその一般化) が得られた:

i) 決定性公理を強めた実数決定性公理を仮定したとき、実数直線上の σ -イデアル I で強制法 P_I がプロパーとなるような I に対しても、実数の集合はすべて I -regular となる。

ii) ZF の下で決定性公理と $V=L(R)$ を仮定したとき、ある強制拡大 $V[G]$ で、決定性公理が成り立ち、かつ順序数 Θ の新しい部分集合が付加されるものが存在する。

発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。）						
雑誌	論文課題	On supercompactness of ω_1				
	著者名	Daisuke Ikegami and Nam Trang	雑誌名	Springer Proceedings in Mathematics and Statistics		
	ページ	27~45	発行年	2 0 2 2	巻号	369
雑誌	論文課題	Determinacy and regularity properties for idealized forcings				
	著者名	Daisuke Ikegami	雑誌名	Mathematical Logic Quarterly		
	ページ	310~317	発行年	2 0 2 2	巻号	68 巻 3 号
雑誌	論文課題					
	著者名		雑誌名			
	ページ	~	発行年		巻号	
図書	書名					
	著者名					
	出版社		発行年		総ページ	
図書	書名					
	著者名					
	出版社		発行年		総ページ	

英文抄録（100語～200語程度にまとめてください。）

In this research project, we worked on the relationship between large cardinal properties of the least uncountable cardinal ω_1 and determinacy of infinite games.

We have obtained several consequences of the supercompactness of ω_1 . Among them are a) for every set X , the set $X^\#$ exists, and b) The statements “AD in $L(R)$ ” holds in any set generic extension of V .

We also investigated on 1) determinacy of the Chang model and on 2) extending the relationship between models with large cardinals and models of AD (the derived model theorem).

For 1), we worked on the question what kind of large cardinals imply AD in the Chang model.

For 2), we worked on obtaining a Chang-like model of AD from a model of large cardinals.

We have shown that both questions are reduced to the problem of some combinatorial property of a Prikry-like forcing as well.

We further obtained two kinds of results on AD:

i) Assuming $ZF+AD_R$, for any σ -ideal I on the reals such that the forcing P_I is proper, every set of reals is I -regular.

ii) Assuming $ZF+AD+“V=L(R)”$, there is a set generic extension of V where AD holds while a new subset of Θ is added.